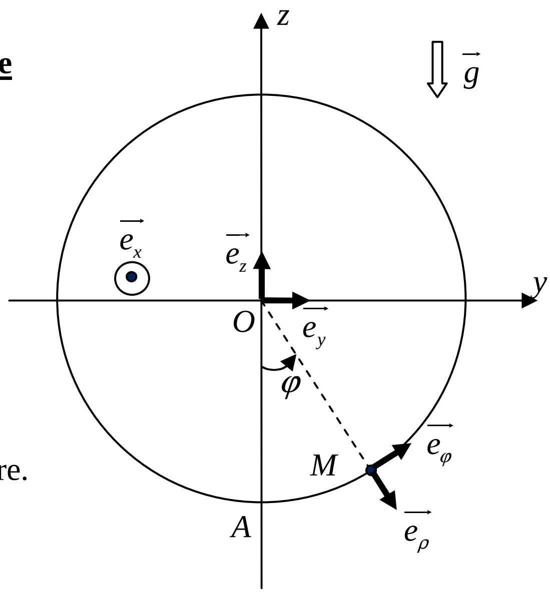
Université Paul Sabatier
L1 STS PCP

Toulouse, le 9 juin 2009

EXAMEN
DE MECANIQUE DU POINT
(Durée : 1h30)

Toutes les parties sont indépendantes. Toutes les justifications nécessaires seront notées.
Les documents personnels, les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.

I – Mouvement d'un point matériel sur une circonférence



Un point matériel *M*, de masse *m*, se déplace sans frottement sur le côté intérieur d'une circonférence (Γ) de centre *O* et de rayon *R* (Figure ci-contre).

La circonférence est fixe dans le plan *yOz* d'un référentiel galiléen $\mathcal{R}(O,xyz)$, dans lequel *Oz* représente la verticale ascendante.

On note *g* le module constant du champ de pesanteur terrestre.

Soit *A* le point le plus bas de la circonférence.

A) Questions de cours.

On introduit la base polaire $\mathcal{B}_p$ liée à *M* dans le plan *yOz*, et définie par les vecteurs unitaires $\vec{e_\rho} = \frac{\overrightarrow{OM}}{R}$ et $\vec{e_\varphi}$, avec $\varphi = \left(-\vec{e_z}, \overrightarrow{OM}\right)$ (Figure).

1) Expliciter les vecteurs $\vec{e_\rho}$ et $\vec{e_\varphi}$ en fonction de $\vec{e_y}$ et $\vec{e_z}$.
2) Rappeler la définition d'une force conservative.
3) Donner les définitions de l'énergie cinétique, de l'énergie potentielle et de l'énergie mécanique.
4) Enoncer le théorème de la puissance mécanique.

B) Le cerceau est immobile

1) Réaliser le bilan des forces qui s'exercent sur le point *M* dans $\mathcal{R}$, et les expliciter dans $\mathcal{B}_p$.
2) Donner l'expression du déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl}(M)$ et de la vitesse $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ du point *M* par rapport à $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{B}_p$.
3) Déterminer l'expression de l'énergie cinétique, de l'énergie potentielle puis de l'énergie mécanique de *M* dans $\mathcal{R}$, en fonction des paramètres de l'énoncé et de $\dot{\varphi}$. On prendra l'origine de l'énergie potentielle au point *A*.

4) L'énergie mécanique du point *M* se conserve-t-elle ? Justifier.

5) En déduire l'équation du mouvement de *M* dans $\mathcal{R}$.

6) On se place dans le cas des petits mouvements $(\varphi \to 0)$.

a. Que devient l'équation différentielle du mouvement ?

b. A l'instant initial $t=0$, le point *M* est lancé depuis *A* avec une vitesse $\overrightarrow{v_o} = v_o\overrightarrow{e_y}$ $(v_o > 0)$. Déterminer l'évolution temporelle $\varphi(t)$.

c. En déduire l'expression de $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ en fonction du temps *t*.

7) Enoncer le théorème de l'énergie cinétique.

8) En déduire l'expression de *v* (norme de $\vec{v}(M/\mathcal{R})$) en fonction de v_o, *g*, *R* et la coordonnée *z* de *M*.

9) Déterminer l'expression z_0 de l'altitude du point (s'il existe) où la vitesse de *M* s'annule. Montrer qu'il existe une valeur critique $(v_o)_c$ de v_o pour laquelle le point *M* peut effectuer un tour complet.

C) Le cerceau est en mouvement

Le cerceau est mis en mouvement de rotation autour de l'axe *Oz*, à la vitesse angulaire Ω constante. On note $\mathcal{R}'(O,x'y'z)$ le référentiel lié au cerceau, et confondu avec $\mathcal{R}$ à l'instant initial. $\mathcal{B}_p$ est toujours la base liée à *M*.

1) Donner l'expression du vecteur rotation $\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$ de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$.

2) Déterminer l'expression $\vec{v}(M/\mathcal{R}')$ de la vitesse de *M* dans $\mathcal{R}'$.

3) Déterminer l'expression $\overrightarrow{v_e}(M,\mathcal{R}'/\mathcal{R})$ de la vitesse d'entraînement de *M*.

4) Déduire de la loi de composition des vitesses l'expression $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ de la vitesse de *M* dans $\mathcal{R}$.

5) Déterminer l'expression $\vec{a}(M/\mathcal{R}')$ de l'accélération de *M* dans $\mathcal{R}'$.

6) Déterminer les expressions $\overrightarrow{a_e}(M,\mathcal{R}'/\mathcal{R})$ et $\overrightarrow{a_c}(M,\mathcal{R}'/\mathcal{R})$, respectivement, de l'accélération d'entraînement et de Coriolis de *M*.

7) Déduire de la loi de composition des accélérations l'expression $\vec{a}(M/\mathcal{R})$ de l'accélération de *M* dans $\mathcal{R}$.

8) A l'aide de la relation fondamentale de la dynamique, donner l'expression de la réaction $\overrightarrow{R_f}$ s'exerçant sur *M*, en fonction des données de l'énoncé et de $\dot{\varphi}$.

II – Trajectoire d'une comète

L'orbite d'une comète *M*, de masse *m*, autour du soleil *S* est une ellipse, dont l'équation en coordonnées polaires centrées sur le soleil s'écrit : $r = \dfrac{p}{1 - e\cos\theta}$, où *e* désigne l'excentricité $(0 < e < 1)$.

1) Quelles sont les valeurs minimale r_P et maximale r_A de la distance comète-soleil, permettant de repérer, respectivement, le périhélie *P* (périgée pour le soleil) et l'aphélie *A* (apogée pour le soleil) ? Faire un schéma de la trajectoire en indiquant les points *S*, *M*, *P*, *A*.

2) Enoncer la loi des aires et faire un schéma explicatif.

3) La surface balayée par la comète pendant un temps d*t* s'écrit $\mathrm{d}S = \dfrac{1}{2}\left\|\vec{r} \times \vec{v}\right\| \mathrm{d}t$.
   a. Déterminer, à l'aide des coordonnées polaires, l'expression de la constante aréolaire *C* définie par $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \dfrac{C}{2}$, en fonction de *r* et $\dot{\theta}$.
   b. Déduire de la dérivée de *C* par rapport au temps, une relation entre *r*, $\dot{r}$, $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$.

4) On cherche à déterminer la norme de l'accélération de la comète.
   a) Donner l'expression de l'accélération $\vec{a}$ de la comète en coordonnées polaires. Que devient cette expression en tenant compte du résultat obtenu en 3-b ?
   b) Déterminer l'expression de $\dot{r}$ en fonction des seuls paramètres *C*, *e*, *p* et θ.
   c) En déduire l'expression de $\ddot{r}$.
   d) Montrer que l'accélération de la comète est de la forme $a = \dfrac{K}{r^2}$, où *K* est une constante que l'on exprimera en fonction de *C* et de *p*.
   e) Donner alors l'expression de la force exercée par le soleil sur la comète en fonction de *C*, *p*, *m* et *r*. Interpréter physiquement la nature de cette force.